

**Задатак 4:** Центрифугална пумпа познате карактеристике при  $n = 2900 \text{ min}^{-1}$  ради на инсталацији приказаној на слици и потискује воду из резервоара  $A$  у резервоар  $B$ . Непосредно на излазу из пумпе постављен је повратни вод (бајпас) кроз који се део воде враћа на улазни пресек пумпе када је вентил повратног вода отворен.

Пречници усисног и потисног дела цевовода су исти  $d_1 = d_2 = d = 125 \text{ mm}$ . Укупна дужина цевовода износи  $l_1 + l_2 = L = 650 \text{ m}$ , коефицијент трења свих деоница магистралног цевовода је  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0,023$ , а укупни локални отпори износе  $\Sigma\zeta_1 + \Sigma\zeta_2 = \Sigma\zeta = 15$ . Пречник повратног вода је  $d_0 = 50 \text{ mm}$ . Разлика нивоа воде у резервоарима износи  $H = 28 \text{ m}$

Одредити:

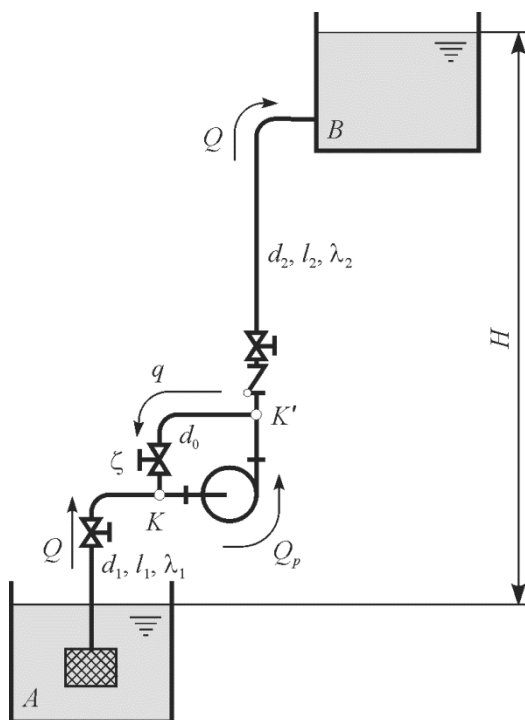
1. Колики мора бити коефицијент локалног отпора  $\zeta$  вентила бајпаса, да би доток у резервоар  $B$  био једнак протоку кроз бајпас?

Колика је при томе потребна снага пумпе?

2. За тако одређен коефицијент локалног отпора  $\zeta$  одредити проток, напор и потребну снагу пумпе при брзини обртања  $n_2 = 2700 \text{ min}^{-1}$ .

Колики је тада доток у резервоар  $B$ ?

3. Колики мора бити коефицијент локалног отпора  $\zeta$  вентила обилазног цевовода да би пумпа радила са максималним степеном корисности (при брзини обртања  $n_2 = 2700 \text{ min}^{-1}$ )?



Радне карактеристике пумпе при  $n = 2900 \text{ min}^{-1}$ :

$Q_p$ [L/s]	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
$Y_p$ [J/kg]	515	530	535	530	512	480	432	373	295	187
$\eta_p$ [%]	0	30	50	63	71	75	75	70	58	36

**Решење (1):** *Регулисање протока помоћу вентила на обилазном воду*

Задатак се решава применом Бернулијеве једначине за све деонице цевовода у којима фигурише само један непознати проток ( $Q$ ,  $Q_p$  или  $q$  на слици) и једначине континуитета за чвор  $K$  или  $K'$ .

Б.Ј. А-К

$$0 = e_K(Q) + \frac{8Q^2}{\pi^2 d_1^4} \left( \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \sum \zeta_1 \right) \quad (1)$$

Б.Ј. К'-В

$$e_{K'}(Q) = gH + \frac{8Q^2}{\pi^2 d_2^4} \left( \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} + \sum \zeta_2 \right) \quad (2)$$

У једначинама (1) и (2) фигурише исти проток па се оне могу сабрати, тако да се након сређивања добија:

$$e_{K'}(Q) - e_K(Q) = \Delta e(Q) = gH + \frac{8Q^2}{\pi^2 d_1^4} \left( \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \sum \zeta_1 \right) + \frac{8Q^2}{\pi^2 d_2^4} \left( \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} + \sum \zeta_2 \right)$$

Узимајући у обзир да је по услову задатка  $d_1 = d_2 = d$ ,  $l_1 + l_2 = L$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  и  $\sum \zeta_1 + \sum \zeta_2 = \sum \zeta$  горња једначина може да се напише у једноставнијем облику:

$$\Delta e(Q) = gH + \frac{8Q^2}{\pi^2 d^4} \left( \lambda \frac{L}{d} + \sum \zeta \right) = Y_c(Q) \quad (3)$$

где израз на десној страни заправо представља карактеристику цевовода од резервоара А до резервоара В.

Б.Ј. К-К'

$$e_K(Q_p) + Y_p = e_{K'}(Q_p)$$

Хидраулички губици у кратким пумпним цевоводима су занемарени. Сређивањем ове једначине тако да на левој страни остане разлика специфичних струјних енергија у чворовима К' и К коначно се добија:

$$\Delta e(Q_p) = e_{K'}(Q_p) - e_K(Q_p) = Y_p \quad (4)$$

што заправо представља дефиницију напора пумпе.

Б.Ј. К'-К

$$e_{K'}(q) = e_K(q) + \frac{8q^2}{\pi^2 d_0^4} \zeta$$

где су губици на трење у обилазном воду занемарени у односу на локалне губитке на вентилу обилазног вода. Сређивањем на сличан начин како је то урађено у случају једначина (3) и (4) добија се:

$$\Delta e(q) = e_{K'}(q) - e_K(q) = \frac{8q^2}{\pi^2 d_0^4} \zeta = Y_{bps}(q) \quad (5)$$

што представља карактеристику обилазног вода.

Једначина континуитета за чвор  $K$  гласи:

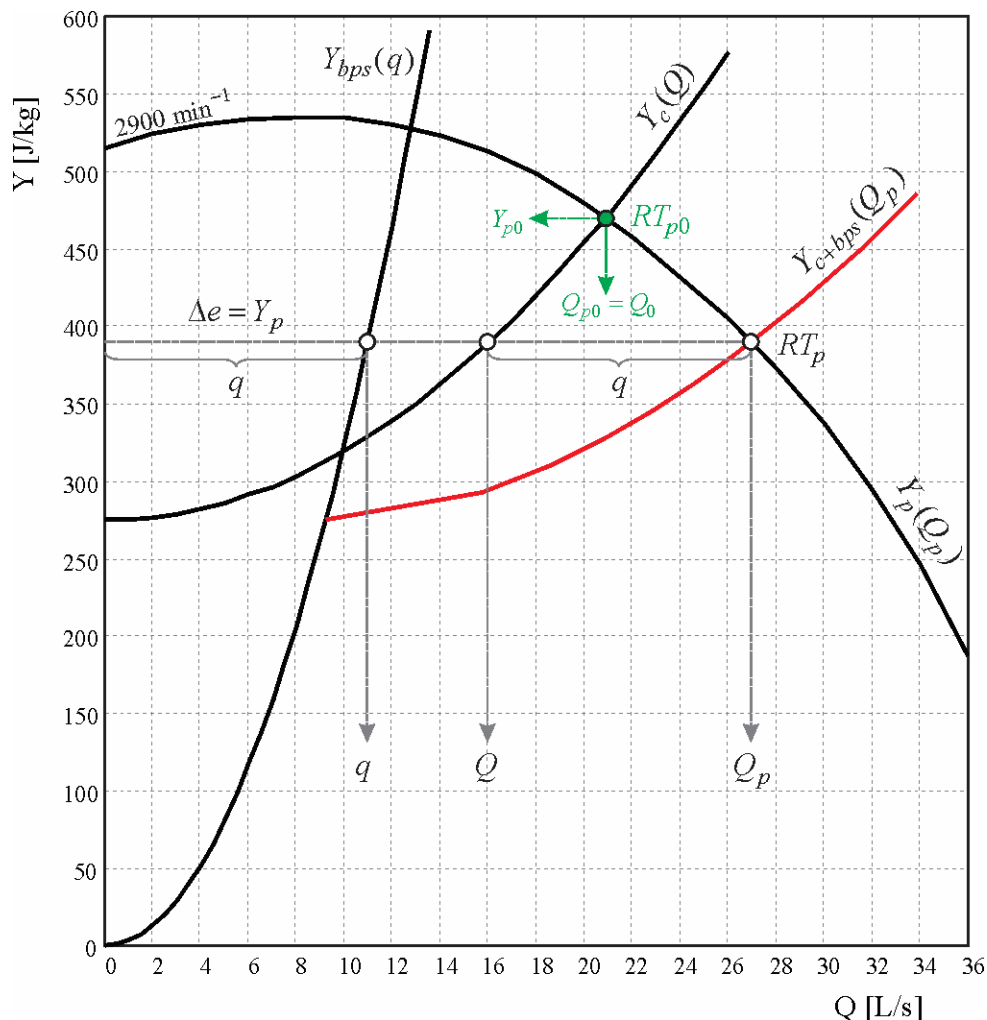
$$Q_p = Q + q \quad (6)$$

а за чвор  $K'$ :

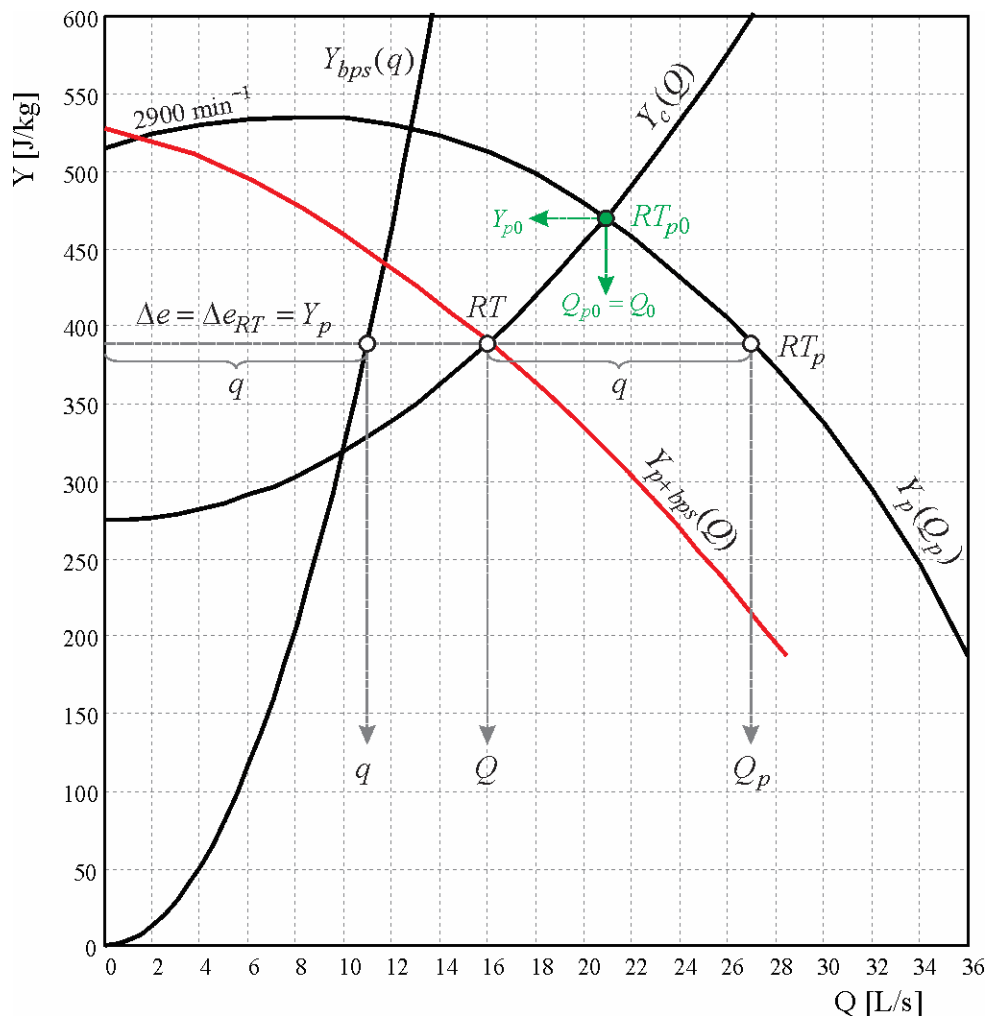
$$Q = Q_p - q \quad (6^*)$$

Једначине (6) и (6\*) су наравно математички идентичне, односно представљају једну једначину написану у два формално различита облика. У зависности од тога да ли се користи форма (6) или (6\*) до графичког решења задатка може да се дође на два начина. Наиме, у устаљеном радном режиму леве стране једначина (3), (4) и (5) бројчано морају бити једнаке тј.  $\Delta e(Q) = \Delta e(Q_p) = \Delta e(q)$  што указује на паралелну везу одговарајућих деоница.

Ако се користи форма (6) једначине континуитета, паралелно треба спрегнути карактеристику цевовода и карактеристику бајпаса  $\rightarrow Y_{c+bps}(Q + q) = Y_{c+bps}(Q_p)$ . У пресеку овако добијене карактеристике паралелне везе  $Y_{c+bps}(Q_p)$  са карактеристиком пумпе  $Y_p(Q_p)$  добија се радна тачка пумпе  $RT_p$  из које се читавају проток и напор пумпе  $(Q_p, Y_p)$ . Протоци кроз цевовод  $Q$  и бајпас  $q$  добијају се из пресечних тачака хоризонтале  $\Delta e = Y_p = const$  са карактеристикама цевовода  $Y_c(Q)$ , односно бајпаса  $Y_{bps}(q)$ . Ово решење скицирано је на наредној слици, при чему је претпостављено да је коефицијент локалног отпора вентила на обилазном воду познат и да износи  $\zeta = 25$ .



Ако се користи форма (6\*) једначине континуитета, паралелно треба спрегнути карактеристику пумпе и карактеристику бајпаса, при чему се при истом напору ( $\Delta e$ ) од протока пумпе одузима проток кроз бајпас  $\rightarrow Y_{p+bps}(Q_p - q) = Y_{p+bps}(Q)$ . У пресеку добијене карактеристике паралелне везе  $Y_{p+bps}(Q)$  са карактеристиком цевовода  $Y_c(Q)$  добија се радна тачка система  $RT$  из које се очитава проток кроз цевовод  $Q$ . Проток кроз бајпас  $q$  и радна тачка пумпе  $RT_p$  добијају се из пресечних тачака хоризонтале  $\Delta e = \Delta e_{RT} = const$  са карактеристикама бајпаса  $Y_{bps}(q)$  и пумпе  $Y_p(Q_p)$ . Из радне тачке пумпе се очитавају проток и напор пумпе ( $Q_p, Y_p$ ), при чему је наравно  $Y_p = \Delta e$ . Ово решење скицирано је на наредној слици уз усвојен исти коефицијент локалног отпора вентила бајпаса као у претходном случају ( $\zeta = 25$ ).



Решење проблема може се посматрати и на следеће начине. У првом случају, паралелним спрезањем карактеристика цевовода и бајпаса добија се карактеристика замишљеног цевовода, у чијем пресеку са карактеристиком пумпе се налази радна тачка. У другом случају, паралелним спрезањем карактеристика пумпе и бајпаса добија се карактеристика замишљене пумпе, у чијем пресеку са карактеристиком цевовода се опет добија радна тачка. У оба случаја, може се рећи да се и овај проблем формално своди на рад пумпе у простом цевоводу (задатак 1).

Треба приметити да се у случају да је вентил на обилазном цевоводу затворен ( $q = 0$ ) радна тачка налази у пресеку карактеристика пумпе и цевовода ( $RT_{p0}$  на обе претходне слике). Сада се јасно уочава да се отварањем бајпаса проток кроз цевовод смањује ( $Q_0 \rightarrow Q$ ) а кроз пумпу расте ( $Q_{p0} \rightarrow Q_p$ ). Са друге стране, за мањи проток ка резервоару  $B$  ( $Q < Q_0$ ) пумпа ради са мањим напором ( $Y_p < Y_{p0}$ ).

Регулисање протока помоћу обилазног вода среће се у пракси (истина не тако често), нарочито у случају великих пумпи у термоенергетским постројењима.

У конкретном проблему, коефицијент локалног отпора вентила на обилазном воду није познат и мора се одредити из услова задатка:

$$Q_1 = q_1 = Q_{p1}/2 \quad \text{при} \quad \Delta e(Q_{p1}) = \Delta e(Q_1) = \Delta e(q_1) \quad (7)$$

Графичко решавање проблема своди се на тражење радне тачке  $RT_1$  на карактеристици цевовода  $Y_c(Q)$  која је подједнако удаљена од ординате  $Y$  и карактеристике пумпе  $Y_p(Q_p)$ , односно тачке у којој је услов (7) задовољен (види слику). Кроз радну тачку  $RT_1$  треба да прође карактеристика бајпаса  $Y_{bps1}(q)$ . Ако се за решавање задатка користи једначина континуитета (6\*), кроз исту тачку проћи ће и карактеристика паралелне везе пумпе и бајпаса  $Y_{p+bps1}(Q)$ , што је такође скицирано на слици. Радна тачка пумпе  $RT_{p1}$  налази се у пресеку хоризонтале  $\Delta e_{RT1} = const$  и карактеристике пумпе  $Y_p(Q_p)$ .

Из тачке  $RT_1$  читава се:

$$RT_1 \rightarrow \quad q_1 = Q_1 = 14,2 \frac{\text{L}}{\text{s}}$$

$$\Delta e(q_1) = \Delta e(Q_1) = \Delta e(Q_{p1}) = e_{RT1} = 365,1 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Заменом у једначину (5) и решавањем по непознатом коефицијенту локалног отпора коначно се добија тражени коефицијент локалног отпора вентила на обилазном воду:

$$\zeta_1 = \frac{\pi^2 d_0^4 \Delta e(q_1)}{8q_1^2} = 13,9$$

Карактеристика обилазног вода  $Y_{bps}(q)$  за овако добијен коефицијент локалног отпора вентила уцртана је на слици.

Из претходно одређене радне тачке пумпе  $RT_{p1}$  читавају се проток, напор и степен корисности пумпе на основу којих се коначно срачунава тражена потребна снага пумпе:

$$RT_{p1} \rightarrow \quad Y_{p1} = 365,1 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \quad Q_{p1} = 28,4 \frac{\text{L}}{\text{s}} \quad \eta_{p1} = 69,0 \%$$

$$P_{p1} = \frac{\rho Q_{p1} Y_{p1}}{\eta_{p1}} = 15,1 \text{ kW}$$

### **Решење (2):**

Сагласно услову задатка, радне карактеристике пумпе  $Y_p(Q_p)$  при  $n = 2900 \text{ min}^{-1}$  треба прерачунати на нову брзину обртања  $n_2 = 2700 \text{ min}^{-1}$  применом закона сличности:

$$Q_p^* = \frac{n_2}{n} Q_p$$

$$Y_p^* = \left(\frac{n_2}{n}\right)^2 Y_p$$

$$\eta_p^* = \eta_p$$

Резултати прерачунавања приказани су табеларно.

Радне карактеристике пумпе при  $n = 2900 \text{ min}^{-1}$ :

$\times \frac{2700}{2900}$ $\times \left(\frac{2700}{2900}\right)^2$ =	$Q_p$ [L/s]	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
	$Y_p$ [J/kg]	515	530	535	530	512	480	432	373	295	187
	$\eta_p$ [%]	0	30	50	63	71	75	75	70	58	36

Радне карактеристике пумпе при  $n_2 = 2700 \text{ min}^{-1}$ :

$Q_p^*$ [L/s]	0	3,72	7,45	11,17	14,9	18,6	22,35	26,07	29,8	33,52
$Y_p^*$ [J/kg]	446,4	459,4	463,8	459,4	443,8	416,1	374,5	323,3	255,7	162,1
$\eta_p^*$ [%]	0	30	50	63	71	75	75	70	58	36

Радне карактеристике пумпе  $Y_p^*(Q_p^*)$  и  $\eta_p^*(Q_p^*)$  при новој брзини обртања  $n_2 = 2700 \text{ min}^{-1}$  приказане су на слици (плаве линије). Карактеристика паралелне везе нове карактеристике пумпе и карактеристике обилазног вода, добијена коришћењем једначине континуитета (6\*), такође је приказана на слици (црвена линија)  $\rightarrow Y_{p^*+bps1}(Q_p - q) = Y_{p^*+bps1}(Q)$ .

У пресеку карактеристике паралелне везе  $Y_{p^*+bps1}(Q)$  са карактеристиком цевовода  $Y_c(Q)$  добија се радна тачка система  $RT_2$  из које се читава проток кроз цевовод  $Q_2$ . Проток кроз бајпас  $q_2$  и радна тачка пумпе  $RT_{p2}$  добијају се из пресека хоризонтале  $\Delta e = \Delta e_{RT2} = const$  са карактеристикама бајпаса  $Y_{bps1}(q)$  и пумпе  $Y_p^*(Q_p^*)$ .

$$RT_2 \rightarrow Q_2 = 11,7 \frac{\text{L}}{\text{s}} \quad q = 13,6 \frac{\text{L}}{\text{s}}$$

$$RT_2 \rightarrow RT_{p2} \rightarrow Y_{p2} = 333,2 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \quad Q_{p2} = 25,3 \frac{\text{L}}{\text{s}} \quad \eta_{p2} = 71,6 \%$$

$$P_{p2} = \frac{\rho Q_{p2} Y_{p2}}{\eta_{p2}} = 11,85 \text{ kW}$$

### Решење (3): Оптимизација рада пумпе

Према услову задатка пумпа треба да ради у оптималној радној тачки при брзини обртања  $n_2 = 2700 \text{ min}^{-1}$ . На радној карактеристици степена корисности пумпе  $\eta_p^*(Q_p^*)$  види се да максималном степену корисности одговара проток:

$$\eta_{p3} = \eta_{\max} = 75,5 \% \rightarrow Q_{p3} = 20,5 \frac{\text{L}}{\text{s}}$$

односно пумпа мора да ради у радној тачки  $RT_3$  на радној карактеристици пумпе  $Y_p^*(Q_p^*)$ :

$$RT_{p3} \rightarrow Y_{p3} = 396,3 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \quad Q_{p3} = 20,5 \frac{\text{L}}{\text{s}}$$

Са друге стране, карактеристика цевовода  $Y_c(Q)$  не пресеца радну карактеристику пумпе  $Y_p^*(Q_p^*)$  у тачки  $RT_{p3}$  него у тачки  $RT_0$  у којој би систем иначе радио уколико би вентил на обилазном воду био затворен. Према томе, јасно је да овај вентил мора бити делимично отворен како би се остварио захтев да пумпа на датом цевоводу ради у радној тачки  $RT_{p3}$ , односно са максималним степеном корисности.

У условима када је вентил бајпаса делимично отворен, односно у условима паралелне везе пумпе и бајпаса (једначина континуитета 6\*), радна тачка система  $RT_3$  налази се у пресеку хоризонтале

$$\Delta e(Q_{p3}) = \Delta e(Q_3) = \Delta e(q_3) = Y_{p3} = 396,3 \text{ J/kg}$$

и карактеристике цевовода  $Y_c(Q)$ . Из тако добијене радне тачке система може се очитати проток кроз цевовод

$$RT_3 \rightarrow Q_3 = 16,5 \frac{\text{L}}{\text{s}}$$

па је потребан проток кроз обилазни вод:

$$q_3 = Q_{p3} - Q_3 = 4 \frac{\text{L}}{\text{s}}$$

Заменом вредности  $q_3$  и  $\Delta e(q_3)$  у једначину (5) и решавањем по непознатом коефицијенту локалног отпора, коначно се добија тражени коефицијент локалног отпора вентила на обилазном воду:

$$\zeta_3 = \frac{\pi^2 d_0^4 \Delta e(q_3)}{8q_3^2} = 189$$

### **Домаћи:**

1. Задатак решити применом једначине континуитета (6) – паралелном спрегом карактеристике цевовода и карактеристике обилазног вода.
2. Одредити специфичну енергију пумпања  $E_p$  [kWh/m<sup>3</sup>] у условима када пумпа ради са брзином обртања  $n = 2900 \text{ min}^{-1}$  а коефицијент локалног отпора вентила на обилазном воду износу  $\zeta = 25$ . Колика би била специфична енергија пумпања када би се исти проток ка резервоару  $B$  остварио пригушивањем вентила на магистралном цевоводу (при



затвореном бајпасу)? Упоредити. У оба случаја усвојити коефицијент корисности електромотора  $\eta_{em} = 91 \%$ .

Напомена:

Специфична енергија пумпања  $E_p$  [kWh/m<sup>3</sup>] је важан индикатор ефикасности пумпног система и представља енергију [kWh] која је потребна да се препумпа један m<sup>3</sup> воде према потрошачу. Може се срачунати као количник потребне електричне снаге пумпног агрегата и корисног протока (протока ка потрошачу) израженог у m<sup>3</sup>/h.

$$E_p = \frac{P_{em} \text{ [kW]}}{Q \text{ [m}^3\text{/h]}} = \frac{P_p}{\eta_{em} Q}$$

